

**EXAMEN DE
MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ESTADÍSTICA I
5-Febrero-2018**

1. [2ptos] Di el carácter (convergente, divergente u oscilante) de las siguientes series numéricas:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^2 + 1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n^n}$$

2. [1pto] Completa la siguiente tabla:

f	g	gof	Dom(g ∘ f)
x-1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-1}$	$\mathbb{R} - \{1\}$
x^2-1	\sqrt{x}	$\sqrt{x^2-1}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\frac{x-1}{x+2}$	$x + \frac{1}{x}$	$\frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)}$	$\mathbb{R} - \{1, -2\}$

$$x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{x-1}{x+2} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x^2-2x+1) + (x^2+4x+4)}{(x+2)(x-1)}$$

3. Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

- a) [0.25ptos] Di si será continua en el punto $x = 0$
 b) [0.75ptos] Encuentra sus puntos de inflexión

4. [1pto] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\sin(x)}{x^3 - x^2}$

5. [1pto] Una herencia de 11000 euros debe distribuirse entre dos hermanos. La ley de sucesiones dice que los impuestos a pagar por cada individuo son el producto de su edad, el cuadrado de la cantidad recibida y el factor $1/180000$. Sabiendo que el hermano mayor tiene 30 años y el menor 25, encuentra la parte de la herencia que le correspondería a cada uno de ellos para que la cantidad total de impuestos a pagar entre los dos sea mínima. ¿Qué cantidad de dinero neto (ya deducidos los impuestos) recibirá cada hermano?

6. [3ptos] Resuelve las siguientes cuestiones relacionadas con integrales:

a) $\int x\sqrt{1+x} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}}$

c) Calcula el área de la región limitada por $\{y = x^3 - 2x, y = x^2\}$ para $x \in [-1, 3]$

7. [1pto] Contesta las siguientes cuestiones teóricas:

a) ¿Existe alguna relación entre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

b) ¿Qué diferencia hay entre una integral indefinida y una definida?

c) ¿Qué diferencia hay entre ínfimo y mínimo de un conjunto de números reales?

d) Si una función es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$, ¿tendrá necesariamente un máximo local en $x = 0$?

RAZONA TUS RESPUESTAS. NO DES RESULTADOS EN FORMA DECIMAL



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS	
NOMBRE D.N.I. N.º	
ASIGNATURA	GRUPO
CURSO	N.º DE MATRÍCULA FECHA

① a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^2+1}$ DIVERGE

$$\lim_n \frac{\frac{e^{2n+2}}{n^2+2n+2}}{\frac{e^{2n}}{n^2+1}} = \lim_n \frac{e^{2n} e^2 (n^2+1)}{e^{2n} (n^2+2n+2)} = e^2 > 1$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^n}$ CONV.

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{2^{\sqrt{n}}}{n^n}} = \lim_n \frac{(2^{\sqrt{n}})^{\frac{1}{n}}}{(n^n)^{\frac{1}{n}}} = \lim_n \frac{2^{\frac{\sqrt{n}}{n}}}{n} = \lim_n \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n} =$$

$$= \lim_n \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

③ a) $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)^3 = 1 = f(0)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{e^x} = 0 \neq f(0)$

Luego, $f(x)$ NO es cont. en $x=0$

b) $f'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & x < 0 \\ 2x e^{-x} - e^{-x} x^2 & x > 0 \end{cases} \quad \left| \quad f'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & x < 0 \\ e^{-x}(2x-x^2) & x > 0 \end{cases}$

$f''(x) = \begin{cases} 6(x+1), & x < 0 \\ -e^{-x}(2x-x^2) + e^{-x}(2-2x), & x > 0 \end{cases}$

$6(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

$e^{-x}(2-2x-2x+x^2) = 0 \Rightarrow e^{-x}(x^2-4x+2) = 0$
 $x^2-4x+2=0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

	signo $f''(x)$	
$x < -1$	-	Conv. hacia abajo
$-1 < x < 0$	+	conc. " arriba
$0 < x < 2-\sqrt{2}$	+	conc. " "
$2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$	-	conc. " abajo
$2+\sqrt{2} < x$	+	" " arriba

PTOS. de INFLEXIÓN $\bullet (-1, 0)$

$(2-\sqrt{2}, (2-\sqrt{2})^2 e^{-(2-\sqrt{2})})$
 $(2+\sqrt{2}, (2+\sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})})$



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS	
NOMBRE D.N.I. N.º	
ASIGNATURA	GRUPO
CURSO	N.º DE MATRÍCULA FECHA

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \operatorname{sen} x}{x^3 - x^2} &\stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + (e^x - 1) \cos x}{3x^2 - 2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \cos x}{3x^2 - 2x} \stackrel{0/0}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{e^x \operatorname{sen} x} + e^x \cos x + e^x \cos x - \cancel{e^x \operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x}{6x - 2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 1 + 0}{-2} = \frac{2}{-2} = \boxed{-1}
 \end{aligned}$$

(5) Para el de 25 años el impuesto es: $25x^2 \frac{1}{180.000}$

x es la cantidad de la herencia para el hermano de 25 años

Así la suma de los impuestos es:

$$f(x) = \frac{25}{180000} x^2 + \frac{30}{180000} (11000 - x)^2 = \frac{25}{180000} x^2 + \frac{30}{180000} (11000 - x)^2 =$$

$$= \frac{25x^2}{180.000} + \frac{30}{180000} (11000^2 - 22000x + x^2) =$$

$$= \frac{25}{180000} x^2 + \frac{30 \cdot 11000^2}{180000} - \frac{660000}{180000} x + \frac{30x^2}{180000} =$$

$$= \frac{25}{180000} x^2 + \frac{3 \cdot 11^2 \cdot 1000}{18} - \frac{66}{18} x + \frac{30x^2}{180000} = \frac{55x^2}{180000} - \frac{66}{18} x + \frac{3 \cdot 11^2 \cdot 1000}{18}$$

$$f'(x) = \frac{110}{180000} x - \frac{66}{18} = 0 \Rightarrow \frac{110}{180000} x = \frac{66}{18} \Rightarrow \boxed{x = \frac{66 \cdot 18000}{18 \cdot 11} = 6 \cdot 1000 = 6000}$$

El hermano de 30 años deberá recibir de la herencia 5000€



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS	
NOMBRE	D.N.I. N.º
ASIGNATURA	GRUPO
CURSO	N.º DE MATRÍCULA
FECHA	

la cantidad de dinero neto será:

hermano de 25 años $\rightarrow 6000 - (25 \cdot 6000^2 \cdot \frac{1}{180000}) =$

$= 6000 - 5000 = \boxed{1000 \text{ €}}$

hermano de 30 años $\rightarrow 5000 - (30 \cdot 5000^2 \cdot \frac{1}{180000}) =$

$= 5000 - 4.166,6 = \boxed{833,3 \text{ €}}$

⑥ a) $\int x\sqrt{1+x} dx \stackrel{p}{=} \int (t^2-1)t \cdot 2t \cdot dt = 2 \int (t^4 - t^2) dt =$

$\sqrt{1+x} = t$
 $1+x = t^2$
 $x = t^2 - 1$
 $dx = 2t dt$

$= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C = 2(1+x)^{3/2} \left(\frac{1+x}{5} - \frac{1}{3} \right) + C$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_n^0 \frac{dx}{1+e^{-x}} + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m \frac{dx}{1+e^{-x}}$

$\int \frac{dx}{1+e^{-x}} \stackrel{p}{=} \int \frac{-\frac{1}{t}}{1+t} dt = \int \frac{-1}{t(1+t)} dt = \int \frac{-1}{t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt = (*)$

$e^{-x} = t$
 $\frac{1}{e^x} = t \Rightarrow e^x = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \ln \frac{1}{t}$
 $dx = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} dt = \frac{-t}{t^2} dt = -\frac{1}{t} dt$

$\frac{-1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$
 $-1 = A + (A+B)t$
 $A = -1$
 $A+B=0 \Rightarrow B=1$

$(*) = -\ln t + \ln(1+t) + C = \ln \frac{1+t}{t} + C = \boxed{\ln \frac{1+e^{-x}}{e^x} + C}$



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS	
NOMBRE	D.N.I. N.º
ASIGNATURA	
CURSO	N.º DE MATRÍCULA
FECHA	

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\ln \frac{1+e^{-x}}{e^{-x}} \right) \Big|_n^0 + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1+e^{-x}}{e^{-x}} \right) \Big|_0^m =$$

$$= \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\ln 2 - \ln \frac{1+e^{-n}}{e^{-n}} \right) + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1+e^{-m}}{e^{-m}} - \ln 2 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\ln 2 - \ln (e^n + 1) \right) + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\ln (e^m + 1) - \ln 2 \right) =$$

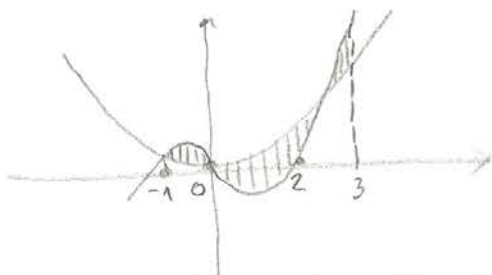
$$= (-\ln 1) + \infty = \boxed{\infty}$$

c) $\begin{cases} y = x^3 - 2x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 2x = x^2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - 2x = 0 \\ x(x^2 - x - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

PTOS de CORTE para: $x = -1, x = 0, x = 2$

$$y = x^3 - 2x \Rightarrow y' = 3x^2 - 2; \quad y'' = 6x$$



$$\text{Área} = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x - x^3) dx + \int_0^2 (x^3 - x^2 + 2x) dx +$$

$$+ \int_2^3 (x^3 - 2x - x^2) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^3 =$$

$$= -\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 4 + 4 + \frac{81}{4} - 9 - 9 - 4 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{80}{4} + 5 - 17 =$$

$$= 25 - 17 = \boxed{8} \text{ u}^2$$



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS		
NOMBRE		D.N.I. n.º
ASIGNATURA		GRUPO
CURSO	N.º DE MATRICULA	FECHA

7) a) Si, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ent. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE

b) La integral indefinida es el conjunto de funciones que tienen por derivada la $f^{(n)}$ del integrando, mientras que una integral definida es un n° real

c) El mínimo es el ínfimo cuando éste pertenece al conjunto

d) No, puede ser por $\int f(x)$